Soit $\mathcal{M}_h = (\mathcal{T}_h, \mathcal{F}_h)$ un maillage et $X \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h$.
Le projecteur L^2-orthogonal $\pi_X^{0,\ell} : L^1(X) \longrightarrow \mathcal{P}^\ell(X)$ (avec $\ell \geq 0$ entier) est t.q. : $\forall v \in L^1(X)$,

$$\int_X \pi_X^{0,\ell} v \, w = \underbrace{\int_X v \, w}_{v \in L^1(X)} \quad \forall w \in \mathcal{P}^\ell(X)$$

$w \in L^\infty(X)$ car polynôme

Comment construire une méthode de discrétisation pour les EDP avec diffusion sur maillages généraux ?

1. notion de maillage polytopal
2. projecteurs sur des espaces de polynômes locaux

$$\pi_X^{0,\ell} \quad X \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h$$
$$\pi_T^{1,\ell} \quad T \in \mathcal{T}_h$$

3. lien entre $\pi_T^{1,k+1}$ et $\pi_T^{0,k}$ et $\pi_F^{0,k}$, $F \in \mathcal{F}_T$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h$

↳ espace $\underline{U}_T^k$

↳ reconstruction du potentiel

$$p_T^{k+1} : \underline{U}_T^k \longrightarrow \mathcal{P}^{k+1}(T)$$

4. $a_T : \underline{U}_T^k \times \underline{U}_T^k \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.
$\forall (\underline{w}_T, \underline{v}_T) \in \underline{U}_T^k \times \underline{U}_T^k$,

terme consistant

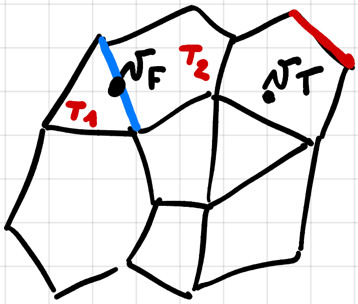
$$\underbrace{a_{|T}(w, v)}_{:= \int_T \nabla w \cdot \nabla v} \approx a_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) := \overbrace{(\nabla p_T^{k+1} \underline{w}_T, \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T)_T}^{\text{terme consistant}} + \underbrace{s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T)}_{\text{stabilisation}}$$

(Π) Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$a(u,v) = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

On définit l'espace HHO global

$$\underline{U}_h^k := \Big\{ \underline{v}_h := \big((v_T)_{T\in\mathcal{T}_h}, (v_F)_{F\in\mathcal{F}_h} \big) : \begin{array}{ll} v_T \in \mathbb{P}^k(T) & \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ v_F \in \mathbb{P}^k(F) & \forall F \in \mathcal{F}_h \end{array} \Big\}$$



$v_T \in \mathbb{P}^k(T)$

$v_F \in \mathbb{P}^k(F)$

Au niveau discret, l'espace suivant joue le rôle de $H_0^1(\Omega)$:

$$\boxed{\underline{U}_{h,0}^k := \Big\{ \underline{v}_h \in \underline{U}_h^k : v_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^b \Big\}}$$

Notation : Pour tout $\underline{v}_h = ((v_T)_{T\in\mathcal{T}_h}, (v_F)_{F\in\mathcal{F}_h}) \in \underline{U}_h^k$ et tout $T \in \mathcal{T}_h$, on note $\underline{v}_T := (v_T, (v_F)_{F\in\mathcal{F}_T}) \in \underline{U}_T^k$ la restriction de $\underline{v}_h$ à T.

On note, de plus, $v_h \in \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h) := \{ w \in L^2(\Omega) \mid w_{|T} \in \mathbb{P}^k(T) \; \forall T \in \mathcal{T}_h \}$ le polynôme brisé t.q.

$$(v_h)_{|T} := v_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

On définit l'INTERPOLATEUR GLOBAL

$\underline{I}_h^k : H^1(\Omega) \longrightarrow \underline{U}_h^k$ t.q. $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\boxed{\underline{I}_h^k v := \left((\pi_T^{0,k} v_{|T})_{T \in \mathcal{T}_h}, (\pi_F^{0,k} v_{|F})_{F \in \mathcal{F}_h} \right)}$$

Remarque $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\underline{I}_h^k v \in \underline{U}_{h,0}^k$

On définit sur $\underline{U}_h^k$ la seminorme t.q.

$$|\cdot|_{H^1(\Omega)} \approx \boxed{\|\underline{v}_h\|_{1,h} := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 \right)^{1/2} \quad \forall \underline{v}_h \in \underline{U}_h^k}$$

avec, $\forall \underline{v}_T \in \underline{U}_T^k$,

$$\|\underline{v}_T\|_{1,T} := \left(\|\nabla v_T\|_T^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F^{-1} \|v_F - v_T\|_F^2 \right)^{1/2}$$

? = est-ce qu'on peut prouver une version discrète de l'inégalité ?

Est-ce $\|\cdot\|_{1,h}$ est une norme sur $\underline{U}_{h,0}^k$?

Lemme (Inégalité de Poincaré discrète)

Il existe $C_P > 0$ dépendant uniquement de Ω, d et de ϱ (paramètre de régularité pour la suite de maillages) t.q.

$$\boxed{\forall \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k, \qquad \|v_h\| \leq C_P \|\underline{v}_h\|_{1,h}}$$

Démonstration Basée sur un résultat de surjectivité pour l'opérateur divergence $\rightsquigarrow$ voir le Lemme 2.15 du livre HHO pour plus de détails. $\square$

Corollaire (Norme $\|\cdot\|_{1,h}$)

La seminorme $\|\cdot\|_{1,h}$ est une norme sur $\underline{U}_{h,0}^k$.

Preuve

On vérifie aisément que $\|\cdot\|_{1,h}$ est une seminorme. Il ne reste plus qu'à prouver que $\forall \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$,

$$\|\underline{v}_h\|_{1,h} = 0 \Rightarrow \underline{v}_h = \underline{0} \in \underline{U}_h^k.$$

Supposons $\|\underline{v}_h\|_{1,h} = 0$. Alors, $\|v_h\| = 0$, c.-à-d.,

$$v_T = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

On a donc

$$\|\underline{v}_h\|_{1,h}^2 = 0 \Rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F^{-1} \|v_F\|_F^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h \qquad \square$$

continu	discret
$H^1(\Omega)$	$\underline{U}_h^k$
$H_0^1(\Omega)$	$\underline{U}_{h,0}^k$
$\|\cdot\|$	$\|\cdot\|$ appliquée aux polynômes rattachés aux éléments
$\lvert\cdot\rvert_{H^1(\Omega)}$	$\|\cdot\|_{1,h}$
$\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\|v\| \le C_\Omega \lvert v\rvert_{H^1(\Omega)}$	$\forall \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$, $\|v_h\| \le C_P \|\underline{v}_h\|_{1,h}$
$a_{\mid T}$	a_T
a	a_h
$H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \int_\Omega f v \in \mathbb{R}$	$\underline{U}_h^k \ni \underline{v}_h \longmapsto \underbrace{\int_\Omega f v_h}_{= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f v_T} \in \mathbb{R}$

Au niveau discret, la forme bilinéaire $a_h : \underline{U}_h^k \times \underline{U}_h^k \to \mathbb{R}$ suivante joue le rôle de $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall\, (\underline{w}_h, \underline{v}_h) \in \underline{U}_h^k \times \underline{U}_h^k, \\ &\qquad a_h(\underline{w}_h, \underline{v}_h) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) \end{aligned}}$$

La forme linéaire $H^1(\Omega) \ni v \longmapsto \int_\Omega f v \in \mathbb{R}$ est discrétisée par :

$$\boxed{\underline{U}_h^k \ni \underline{v}_h \longmapsto \int_\Omega f\, v_h \in \mathbb{R}} \quad (*)$$

Remarque Les valeurs aux faces de $\underline{v}_h$ n'apparaissent pas dans l'expression de la forme linéaire $(*)$.

Ce choix :

1. justifie le choix de prendre des inconnues d'élément de degré k (au lieu de $k-1$) lorsque $k=0$
2. permet d'écrire la méthode HHO en termes de FLUX NUMÉRIQUES
(3. simplifie la preuve de la consistance de a_h)

Lemme (Propriétés de a_h)

La forme bilinéaire a_h a les propriétés suivantes :

1) Coercivité et continuité. Pour tout $\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}$ on a :

$$\boxed{\eta^{-1}\|\underline{v}_h\|_{1,h}^2 \le \|\underline{v}_h\|_{a,h}^2 \le \eta\,\|\underline{v}_h\|_{1,h}^2}$$

avec $\eta>0$ défini dans (S2) et

$$\|\underline{v}_h\|_{a,h} := a_h(\underline{v}_h,\underline{v}_h)^{1/2}.$$

2) Consistance. $\forall r \in \{0,\dots,k\}$, $\forall w \in H_0^1(\Omega)\cap H^{r+2}(\mathcal{T}_h)$, t.q. $\Delta w \in L^2(\Omega)$

$\|\mathcal{E}_h(w;\cdot)\|_{a_h,*}$

$$\boxed{\sup_{\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k,\ \|\underline{v}_h\|_{a,h}=1} |\mathcal{E}_h(w;\underline{v}_h)| \lesssim h^{r+1}\,|w|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}}$$

avec constante cachée indépendante de h et de w et forme linéaire $\mathcal{E}_h(w;\cdot) : \underline{U}_{h,0}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$\boxed{\mathcal{E}_h(w;\underline{v}_h) := -(\Delta w, v_h) - a_h(\underline{I}_h^k w, \underline{v}_h).}$$

Preuve

1) Conséquence immédiate de (S2)

2) Soit $\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$ t.q. $\|\underline{v}_h\|_{a,h} = 1$. On pose

$$\check{w}_T := p_T^{k+1}\left(\underline{I}_T^{k+1} w\right) = \pi_T^{1,k+1} w_{|T}$$

$$-(\Delta w, v_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} -\int_T \Delta w \, v_T$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left[\int_T \nabla w \cdot \nabla v_T - \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \int_F (\nabla w \cdot n_{TF})\, v_T \right] \qquad (*)$$

On remarque ensuite que $\nabla w \in H(\mathrm{div};\Omega) \cap H^1(\mathcal{T}_h)^d$

(car $\Delta w = \nabla\cdot(\nabla w) \in L^2(\Omega)$ et $w \in H^{r+2}(\mathcal{T}_h) \subset H^2(\mathcal{T}_h)$)

et $v_F = 0 \ \forall F \in \mathcal{F}_h^b$, ce qui implique :

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \int_F (\nabla w \cdot n_{TF})\, v_F = 0 \qquad (**)$$

(voir Corollaire 1.19 du livre)

$$\boxed{\begin{aligned}&(*), (**)\\ &\Rightarrow -(\Delta w, v_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left[\int_T \nabla w \cdot \nabla v_T + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\int_F (\nabla w\cdot n_{TF})(v_F - v_T)\right]\end{aligned}}$$

On remarque, ensuite, que :

$$a_h(\underline{I}_h^k w, \underline{v}_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} a_T(\underline{I}_T^k w|_T, \underline{v}_T) \qquad \text{(déf. } a_h)$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left[\int_T \nabla \check{w}_T \cdot \nabla p_T^{k+1}\underline{v}_T + s_T(\underline{I}_T^k w, \underline{v}_T)\right] \qquad \text{(déf. } a_T)$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left[\int_T \nabla \check{w}_T \cdot \nabla v_T + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\int_F (\nabla \check{w}_T \cdot n_{TF})(v_F - v_T) + s_T(\underline{I}_T^k w, \underline{v}_T)\right]$$

(déf. $p_T^{k+1}\underline{v}_T$)

On a donc que

$$\mathcal{E}_h(w;\underline{v}_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\Big[\cancel{\int_T \nabla(w-\check{w}_T)\cdot\nabla v_T}$$

$$+ \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\int_F \nabla(w-\check{w}_T)\cdot n_F\,(v_F - v_T)$$

$$+ s_T(\underline{I}_T^k w, \underline{v}_T)\Big]$$

$$=: \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\Big[\mathfrak{T}_1(T) + \mathfrak{T}_2(T) + \mathfrak{T}_3(T)\Big]$$

- $\mathfrak{T}_1(T) = \int_T \nabla(w-\check{w}_T)\cdot\nabla v_T = \int_T \nabla(w-\pi_T^{1,k+1}w)\cdot\nabla v_T = 0$

par définition de $\pi_T^{1,k+1}$ après avoir remarqué que $v_T \in \mathbb{P}^k(T) \subset \mathbb{P}^{k+1}(T)$

- A partir des propriétés (S1)–(S3) on peut prouver que

$$|s_T(\underline{I}_T^k w, \underline{v}_T)| \lesssim h_T^{r+1}\,|w|_{H^{r+2}(T)}\,\|\underline{v}_T\|_{1,T} \quad \forall T\in\mathcal{T}_h \quad (***)$$

avec constante cachée indépendante de h, T et w.

↳ voir Proposition 2.14 du livre (laissée en exercice)

$$\Big|\sum_{T\in\mathcal{T}_h} s_T(\underline{I}_T^k w_{|T}, \underline{v}_T)\Big| \overset{(***)}{\lesssim} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \underbrace{h_T^{r+1}}_{\leq h^{r+1}}\,|w|_{H^{r+2}(T)}\,\|\underline{v}_T\|_{1,T}$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq h^{r+1}\underbrace{\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}|w|^2_{H^{r+2}(T)}\Big)^{1/2}}_{=:|w|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}}\underbrace{\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\underline{v}_T\|^2_{1,T}\Big)^{1/2}}_{=:\|\underline{v}_h\|_{1,h}}$$

$$\Rightarrow \Big|\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\mathfrak{T}_3(T)\Big| \lesssim h^{r+1}\,|w|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}\,\|\underline{v}_h\|_{1,h}$$

$$\bullet \quad |\delta_2(T)| = \left| \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F \nabla (w - \check{w}_T) \cdot n_{TF} \, (v_F - v_T) \right|$$

Hölder

$$\leq \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \underbrace{\|n_{TF}\|_{L^\infty(F)^d}}_{\leq 1} h_F^{1/2} \|\nabla (w - \check{w}_T)\|_F \; h_F^{-1/2} \|v_F - v_T\|_F$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F \|\nabla (w - \check{w}_T)\|_F^2 \right)^{1/2}} \underbrace{\left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F^{-1} \|v_F - v_T\|_F^2 \right)^{1/2}}_{=: |\underline{v}_T|_{1,\partial T} \leq \|\underline{v}_T\|_{1,T}}$$

$$\leq \left(h_T \|\nabla (w - \check{w}_T)\|_{\partial T}^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(h_T \|\nabla (w - \pi_T^{1,k+1} w_{|T})\|_{\partial T}^2 \right)^{1/2}$$

$$\lesssim \left(h_T |w - \pi_T^{1,k+1} w_{|T}|_{H^1(\partial T)}^2 \right)^{1/2}$$

$$\lesssim h_T^{(r+1)} |w|_{H^{r+2}(T)}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_2(T) \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{r+1} |w|_{H^{r+2}(T)} \|\underline{v}_T\|_{1,T}$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{h_T^{2(r+1)}}_{\leq h^{2(r+1)}} |w|_{H^{r+2}(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq h^{r+1} |w|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)} \|\underline{v}_T\|_{1,T}$$

En conclusion

$$|\mathcal{E}_h(w, \underline{v}_h)| \lesssim h^{r+1} |w|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)} \underbrace{\|\underline{v}_h\|_{1,h}}_{\leq \eta^{1/2} \|\underline{v}_h\|_{a,h} \lesssim 1}$$

$$\Rightarrow \sup_{\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k} |\mathcal{E}_h(w, \underline{v}_h)| \lesssim h^{r+1} |w|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)} \qquad \square$$

(Π_h) Trouver $\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$ t.q.

$$a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = (f, v_h) \quad \forall \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$$

$$\underline{v}_h = ((v_T)_{T \in \mathcal{T}_h}, (v_F)_{F \in \mathcal{F}_h}) \in \underline{U}_h^k$$

$$v_h \in \mathcal{P}^{k+1}(\mathcal{T}_h) \text{ t.q. } (v_h)_{|T} := v_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

Lemme (Bonne position du problème discret)

(Π_h) est bien posé et on a :

$$\|\underline{u}_h\|_{a,h} \leq \eta^{1/2} C_p \|f\|.$$

$$-\nabla \cdot (K \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$